Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2019

Übungsblatt 3

Wir haben uns Verfahren für lineare Gleichungssysteme und für die Berechnung des Ranges und der Inversen einer Matrix angeschaut: Sie beruhen auf den elementaren Zeilenumformungen. Diese elementaren Umformungen kann man auch als Anwendung spezieller, regulärer Matrizen darstellen.

Präsenzaufgabe

Diese Aufgabe ist nicht abzugeben und wird am 16. und 17. Mai in den Übungen besprochen.

1. Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung einer bijektiven linearen Abbildung wieder linear ist.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 21. Mai 2019, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Gegeben ist die Abbildung

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x - 5y \\ -x + 4y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass A linear ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von A bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

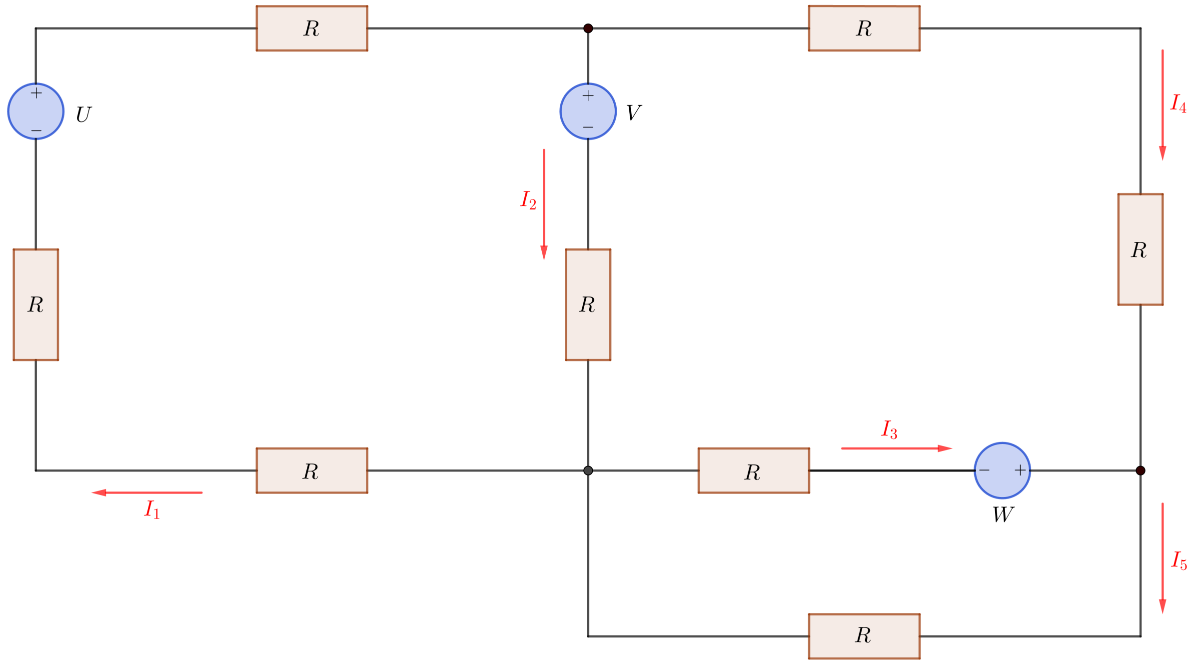
(c) Zeigen Sie, dass

$$\underline{G} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \underline{H} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

auch Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind.

(d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von A bezüglich $\underline{G}$ und $\underline{H}$.

2. Ein elektrischer Stromkreis besteht aus Gleichspannungsquellen und Widerständen wie auf dem Bild abgebildet.



Die Kirchhoff'schen Regeln liefern dann die folgenden Gleichungen: In den linken zwei Knoten muss für die Stromstärken $I_1 - I_2 - I_4 = 0$ und $I_2 + I_5 - I_1 - I_3 = 0$ gelten. Dazu kommen noch drei Gleichungen für die Maschen: $U + V - 3RI_1 - RI_2 = 0$, $V + W + 2RI_4 - RI_2 - RI_3 = 0$ und $W - RI_3 - RI_5 = 0$. Dabei ist $R = 50\,\Omega$, $U = 300\,\mathrm{V}$, $V = 400\,\mathrm{V}$ und $W = 200\,\mathrm{V}$.

(a) Schreiben Sie das Gleichungssystem für Stromstärken in der Matrixform (also $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) um.

(b) Lösen Sie das System mit dem Gauß'schen Eliminiationsverfahren.

(c) Hat das System für alle (positiven) Spannungen U, V und W eine Lösung und ist sie eindeutig?

3. (a) Geben Sie falls möglich die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme an

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & -1 & -2 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bringen Sie die Matrix A mittels des Gauß-Verfahrens in Zeilenstufenform. Bestimmen Sie den Rang von A, die Dimension des Kerns von A, eine Basis des Kerns von A und eine Basis des Bildes von A.